Title	提携に制限のあるファジィ協力ゲーム (決定理論と最適化アルゴリズム)
Author(s)	森谷, 篤史; 黒木, 浩二郎; 巽, 啓司; 谷野, 哲三
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1409: 139-152
Issue Date	2005-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/26164
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 139-152

提携に制限のあるファジィ協力ゲーム

大阪大学大学院 工学研究科 森谷 篤史 (Atsushi Moritani)
大阪大学大学院 工学研究科 黒木 浩二郎 (Kojirou Kuroki)
大阪大学大学院 工学研究科 巽 啓司 (Keiji Tatsumi)
大阪大学大学院 工学研究科 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 はじめに

協力ゲームにおける最大の関心事の 1 つに，提携を形成することにより得られた値の提携内に含まれるプレーヤーへの分配方法がある．協力ゲームではこの分配方法を解と呼ぶ．現在までに，多くの研究者により協力ゲームの解についての研究がなされているが，その解の代表的なものにコア [7] や Shapley 値 [6] がある．

従来の協力ゲームではプレーヤーが提携に参加するかしないかの 2 通りの表現しか扱うことができなかった．これに対して，提携にプレーヤーの提携への部分的な参加を許す，ファジィ提携が Aubin[2] によって導入されている．このようなファジィ提携によるゲームとして，ファジィ協力ゲームが考えられている [2]．ファジィ協力ゲームの解としても，コアや Shapley 値などがすでに考えられている．特に Shapley 値を一般のファジィ協力ゲームに対し定義することは難しく，Butnariu[4] は特別なクラスのファジィ協力ゲームに対してのみファジィ協力ゲームにおける Shapley 値を定義した．しかしながら，このゲームのクラスと与えられた Shapley 値は必ずしも適切なものといえない．そこで鶴見ら [9, 11] は Choquet 積分の概念を用いて，新たなクラスのファジィ協力ゲームを導入し，そのような Choquet 積分型のゲームに対する Shapley 値を定義し，その公理的特徴付けを行った [9]．しかし，Choquet 積分を用いて表現できるファジィ協力ゲームしか扱えない．よって，本稿では，一般的なファジィ協力ゲームに対し，Shapley 値の新たな定義を提案する．そのために，元のファジィ協力ゲームの誘導ゲームを導入する．誘導ゲームは与えられたファジィ提携に依存して決まるクリスプゲームである．また，元のファジィ協力ゲームの解として，誘導ゲームの Shapley 値である誘導 Shapley 値を提案する．誘導 Shapley 値はゲームだけでなくファジィ提携にも依存する．

さて，従来のクリスプゲームにおいては，任意の提携が実現可能 (feasible) である，つまり，各プレーヤーは任意のプレーヤーと提携を形成することができると仮定していた．しかし，現実には特定のプレーヤーと提携を形成することが不可能な状況などが想定され，その結果，実現不可能な提携が生じることもある．このような状況を扱うために，feasible coalition system の概念が導入されている．Algaba ら [1] や Bilbao[3] は，feasible coalition system を通して，提携への制限を反映した，制限ゲームと呼ばれる新たな協力ゲームを定義した．彼らはまた，この制限ゲームのコアや Shpaley 値を用いて，提携に制限のある協力ゲームの解を考えている．

本稿ではこの考え方をファジィ協力ゲームに適用し，ファジィ提携に制限があるファジィ協力ゲームを考える．まず，実現可能なファジィ提携の集合 (以下 FCS) を考え，それを基に新たなファジィ協力ゲームを制限ゲームとして定義する．さらに制限ゲームの性質の継承や，本稿で提案する Shapley 値を用いた制限ゲームの解について考察する．

2 協力ゲームとファジィ協力ゲーム

通常の協力ゲームとその拡張概念であるファジィ協力ゲーム，またそれぞれの解について述べる．なお，本稿を通じて，簡略化のため，$\{i\}, S\cup\{i\}, S\setminus\{i\}$ をそれぞれ $i, S\cup i, S\setminus i$ と表記する．

2.1 協力ゲームの定式化

協力ゲームでは，n 人のプレーヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ で表す．このとき，N の任意の部分集合 $S \subseteq N$ を提携と呼ぶ．ここで，$v : 2^N \to \mathbf{R}$ で表現される実数値関数 v を特性関数と呼び，$v(\emptyset) = 0$ とする．$\emptyset$ は空集合を表す．プレーヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N, v) を協力ゲームあるいは単にゲームと呼ぶ．プレーヤー集合 N を固定して考える場合は，ゲームを単に v で表す．本稿では，特に断らない限り，N を固定して考え，N 上のすべてのゲーム v の集合を $\mathcal{G}$ で表す．

次に，協力ゲームの性質について述べる．

定義 1 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が次式を満たすとき優加法的であるという．

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \quad \forall S, T \subseteq N \quad \text{s.t. } S \cap T = \emptyset.$$

定義 2 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が次式を満たすとき単調であるという．

$$v(S) \leq v(T), \quad \forall S, T \subseteq N \quad \text{s.t. } S \subseteq T.$$

定義 3 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が次式を満たすとき凸であるという．

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \quad \forall S, T \subseteq N.$$

定義より明らかに，ゲーム v が凸なら優加法的でもある．

また，後の議論のため，次のようなある特定の条件を満たすプレーヤーを定義する．

定義 4 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ において，(1) が成り立つときプレイヤー $i \in N$ をナルプレイヤー，(2) が成り立つときプレーヤー $j \in N$ をダミープレーヤーという．

$$v(S \cup i) = v(S), \quad \forall S \subseteq N \setminus i. \tag{1}$$

$$v(S \cup j) = v(S) + v(j), \quad \forall S \subseteq N \setminus j. \tag{2}$$

定義 5 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ において，次式が成り立つときプレイヤー $i, j \in N$ は対称であるという．

$$v(S \cup i) = v(S \cup j), \quad \forall S \subseteq N \setminus i, j.$$

任意の 2 人のプレイヤーが対称であるゲームを対称ゲームという．

2.2 協力ゲームの解

現在までに，多くの研究者により協力ゲームの解についての研究がなされている．利得ベクトルの優越関係もしくは提携のもつ不満や異議に基づく安定集合，コア，仁，交渉集合，さらにはプレーヤーの限界貢献度に基づく Shapley 値，τ 値などが提案されているが，本稿では，その中でも代表的なコア [7] と Shapley 値 [6] を扱う．

2.2.1 コア

まず，配分の概念を導入する．

定義 6 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ が次の関係を満たすとき x は v における配分という．

- 個人合理性
  $x_i \geq v(i), \quad \forall i \in N.$

- 全体合理性
$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$.

個人合理性の拡張として，次の提携合理性の概念を考えることができる．また，提携合理性の概念を用いて，コアを次のように定義する [7].

定義 7 $v \in \mathcal{G}$ をゲームとする．このとき，次の提携合理性を満たすすべての配分の集合を v におけるコアという．

- 提携合理性
$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N$.

つまり，v におけるコア $C(N,v)$ は次のように与えられる．

$$C(N,v) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subseteq N\}.$$

2.2.2 Shapley 値

協力ゲームの代表的な解概念として，コアの他に Shapley 値が考えられている [6]. Shapley 値は，提携の生成される順列を考え，この順列が等確率で成立するという仮定に基づいた，各プレーヤーの限界貢献度の期待値であると考えられる．

定義 8 任意のプレーヤー $i \in N$ について，

$$\phi_i(N,v) = \sum_{S\subseteq N} \beta(S;N)(v(S) - v(S\setminus i))$$

を，プレーヤー i の Shapley 値といい，その組

$$\phi(N,v) = (\phi_1(N,v), \phi_2(N,v), \ldots, \phi_n(N,v)).$$

をゲーム v の Shapley 値という．ただし，

$$\beta(S;N) = \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}.$$

であり，$|S|$ は S に含まれるプレーヤーの数を表す．

ここで，協力ゲームにおける解を $\gamma : 2^N \times \mathcal{G} \to \mathbf{R}^n$ として，以下の公理を考える．

公理 1 全体合理性
任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して，ゲームの解 γ は次式を満たす．

$$\sum_{i\in N} \gamma_i(N,v) = v(N).$$

公理 2 ナルプレーヤー（またはダミープレーヤー）のゼロ評価
任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して，プレーヤー $i \in N$ をナルプレーヤー，プレーヤー $j \in N$ をダミープレーヤーとすると，ゲームの解 γ は次式を満たす．

$$\gamma_i(N,v) = 0,$$
$$\gamma_j(N,v) = v(j).$$

公理 3 対称性

任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して，2 人のプレーヤー $i, j \in N$ が対称ならば，ゲームの解 γ は次式を満たす．

$$\gamma_i(N, v) = \gamma_j(N, v).$$

公理 4 加法性

任意の和ゲーム $v + w \in \mathcal{G}$ に対して，ゲームの解 γ は次式を満たす．

$$\gamma(N, v + w) = \gamma(N, v) + \gamma(N, w).$$

Shapley 値の公理的特徴付けに関して，次の 2 つの定理が成り立つことが知られている．

定理 1 *[6]* Shapley 値は全体合理性，ナルプレーヤー（またはダミープレーヤー）のゼロ評価，対称性，加法性（公理 1 - 4）を満たす唯一の解である．

凸ゲームにおけるコアと Shapley 値に関しては次のような関係が成り立つが知られている．

定理 2 *[8]* $v \in \mathcal{G}$ を凸ゲームとする．凸ゲームの Shapley 値 $\phi(N, v)$ はコア $C(N, v)$ に含まれる．つまり，

$$\phi(N, v) \in C(N, v)$$

が成り立つ．

2.3 ファジィ協力ゲームの定式化

ここでは，ファジィ協力ゲームにおける基本概念を導入する．なお，これ以降，ファジィ協力ゲームに対して，通常の協力ゲームをクリスプゲームと呼ぶ．

クリスプゲームの場合と同様に，$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ を n 人のプレーヤーの集合とする．クリスプゲームにおける提携 S は N の部分集合であるが，これは第 i 成分が $i \in S$ なら 1 で，$i \notin S$ なら 0 となる n 次元の 0-1 ベクトル s と同一視できる．すなわち，提携は $\{0, 1\}^n$ の要素とみなすことができる．提携へのプレーヤーの参加度を考慮するためには，これを拡張して $[0, 1]^n$ の要素を考えればよい．つまり，$s \in [0, 1]^n$ をファジィ提携と呼び，$s = (s_1, \ldots, s_n)$ の各成分 s_i はプレーヤー i のこの提携 s への参加度を表すものとする．

ファジィ提携 s と任意の $h \in [0, 1]$ に対して，s のレベル集合を次のように表現する．

$$[s]_h = \{i \in N \mid s_i \geq h\}.$$

ファジィ提携 s に対して，s のサポートを

$$\mathrm{supp}\ s = \{i \in N \mid s_i > 0\}$$

とする．零ベクトルを $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ とする．$\mathbf{R}^n$ の第 i 単位ベクトルを e^i で表す．つまり，

$$(e^i)_j = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

である．

以下でもプレーヤー集合 N は固定して考え，ファジィ協力ゲームを $\hat{v}(\mathbf{0}) = 0$ を満たすような実数値関数 $\hat{v} : [0, 1]^n \to \mathbf{R}$ とする．また，すべての $\hat{v}$ の集合を $\hat{\mathcal{G}}$ で表す．

ファジィ提携 $s, t \in [0, 1]^n$ の union と intersection を次のように表記する．

$$\begin{aligned} (s \vee t)_i &= \max\{s_i, t_i\}. \\ (s \wedge t)_i &= \min\{s_i, t_i\}. \end{aligned}$$

次に，ファジィ協力ゲームの性質について述べる．

定義 9 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が (3) を満たすとき強優加法的，$\hat{v}$ が (4) を満たすとき弱優加法的であるという．

$$\hat{v}(s) + \hat{v}(t) \leq \hat{v}(s+t), \quad \forall s, t \in [0,1]^n \quad \text{s.t. } s+t \in [0,1]^n. \tag{3}$$

$$\hat{v}(s) + \hat{v}(t) \leq \hat{v}(s \vee t), \quad \forall s, t \in [0,1]^n \quad \text{s.t. } s \wedge t = \mathbf{0}. \tag{4}$$

$s \wedge t = \mathbf{0}$ ならば $s \vee t = s + t$ となることに注意すれば，定義より明らかに，$\hat{v}$ が強優加法的ならば，弱優加法的でもある．

定義 10 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が次式を満たすとき単調であるという．

$$\hat{v}(s) \leq \hat{v}(t), \quad \forall s, t \in [0,1]^n \quad \text{s.t. } s \leq t.$$

注意 1 ファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ が非負実数値関数かつ強優加法的ならば，単調でもある．

定義 11 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が次式を満たすとき凸であるという．

$$\hat{v}(s) + \hat{v}(t) \leq \hat{v}(s \vee t) + \hat{v}(s \wedge t), \quad \forall s, t \in [0,1]^n.$$

定義より明らかに，$\hat{v}$ が凸ならば，弱優加法的である．

2.4 ファジィ協力ゲームの解

2.2 で取り扱った解（コア，Shapley 値）は，全体提携の形成を暗黙の仮定としてゲームに依存した利得の分配方法を集合として与えるものである．ここで，ファジィ協力ゲームにおいて実際にファジィ提携が形成されたときの利得の分配方法を集合として与えるもの，すなわち，ゲームはもちろんであるがファジィ提携にも依存しているものを特に区別して解関数と呼ぶことにする．

2.4.1 ファジィ協力ゲームのコア

ファジィ協力ゲームの利得の分配方法として，現在までにコアが考え出されている．ファジィ協力ゲームのコアには，解としての Aubin ら [2] によるコアや解関数としての鶴見ら [10] によるコアがあるが，本稿ではファジィ協力ゲームの利得の分配方法には解関数のみを考えるので，ここでは鶴見らによるコアを扱うものとする．

まず，クリスプゲームの場合と同様に，コアの概念の元となる配分を以下のように定義する．

定義 12 ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ を $\hat{v}$ における s に対する配分という．

- ゼロプレイヤー特性
  $x_i = 0, \quad \forall i \notin \text{supp } s.$
- ファジィ提携 s に関する全体合理性
  $\displaystyle\sum_{i \in \text{supp } s} x_i = \hat{v}(s).$
- 個人合理性
  $x_i \geq \hat{v}(s_i e^i), \quad \forall i \in \text{supp } s.$

定義 13 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ をファジィ協力ゲームとする．このとき，次の提携合理性を満たすすべての配分の集合を $\hat{v}$ の s に対するコアという．

$$\sum_{i \in \mathrm{supp}\ s'} x_i \geq \hat{v}(s'), \quad \forall s' \leq s.$$

つまり，$\hat{v}$ の s に対するコア $\hat{C}(s, \hat{v})$ は次のように与えられる．

$$\hat{C}(s,\hat{v}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i \in \mathrm{supp}\ s} x_i = \hat{v}(s),\ x_i = 0,\ i \notin \mathrm{supp}\ s,\ \sum_{i \in \mathrm{supp}\ s'} x_i \geq \hat{v}(s'),\ \forall s' \leq s\}.$$

2.4.2 Choquet 積分型 Shapley 値

ファジィ協力ゲームの一例として，鶴見ら [9, 11] によって導入された Choquet 積分を用いたファジィ協力ゲームを示す．

定義 14 ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ に対して，$q(s)$ を supp s の基数とする．ここで，すべての $i \in$ supp s に対する s_i の値を増加順に並べたものを $h_1 < \cdots < h_{q(s)}$ とおき直す．クリスプゲーム $v \in \mathcal{G}$ の Choquet 積分で与えられるファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ は Choquet 積分型ファジィ協力ゲームであるという．

$$\hat{v}(s) = \sum_{l=1}^{q(s)} v([s]_{h_l})(h_l - h_{l-1}), \quad \forall s \in [0,1]^n.$$

この Choquet 積分型ファジィ協力ゲームは，クリスプゲームから導出するため，ファジィ協力ゲームの限定されたクラスを提供する．すなわち，一般のファジィ協力ゲームは $[0,1]^n$ 上で定義されるが，Choquet 積分型ファジィ協力ゲームは実際には $\{0,1\}^n$ 上での値，つまり，1 つのクリスプゲームによって定められる．

ここで，クリスプゲームから導出される Choquet 積分型ファジィ協力ゲームの集合を $\hat{\mathcal{G}}^c$ とする．また，Choquet 積分の概念を用いて，鶴見らはファジィ協力ゲームの解関数として Choquet 積分型 Shapley 値を考えた．ただし，ファジィ協力ゲームは $\hat{\mathcal{G}}^c$ のクラスのみを扱うものとする．

定義 15 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}^c$ をクリスプゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対応する Choquet 積分型ファジィ協力ゲームとする．このとき，$\hat{v}$ における s に対する Choquet 積分型 Shapley 値 $f(s, \hat{v})$ は次式で与えられる．

$$f_i(s,\hat{v}) = \sum_{l=1}^{q(s)} \phi_i'([s]_{h_l}, v)(h_l - h_{l-1}), \quad \forall i \in N.$$

ただし，$\phi_i'([s]_{h_l}, v)$ は次で与えられる．

$$\phi_i'([s]_{h_l}, v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{T \subseteq [s]_{h_l}} \beta(T; [s]_{h_l})[v(T) - v(T \setminus i)], & i \in [s]_{h_l}, \\ 0, & i \notin [s]_{h_l}. \end{cases}$$

3 実現可能提携集合

3.1 実現可能提携集合と制限ゲーム

クリスプゲームやファジィ協力ゲームにおいては，任意の提携が実現可能 (feasible) である，つまり，各プレーヤーは任意のプレーヤーと提携を形成することができると仮定していた．しかし，現実には特定の

プレーヤーと提携を形成することが不可能な状況などが想定され，その結果，実現不可能な提携が生じることもある．ここでは，ファジィ提携の実現可能性をモデル化したものとして実現可能提携集合 (Feasible Coalition Set:FCS) が考える．

まず始めに，FCS を次のように定義する．

定義 16 次の 2 つの条件を満たすとき，集合 $F \subseteq [0,1]^n$ を実現可能提携集合 (FCS) と呼ぶ．

(i) F は閉集合

(ii) $\alpha e^i \in F, \quad \forall \alpha \in [0,1]$

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ に対し，$\sum_{j=1}^{l} s^j = s$ を満たす $\{s^1, \ldots, s^l\} \subseteq [0,1]^n, l \in \mathbf{R}$ を s の分割という．特に FCS F が与えられたとき，$s^j \in F$, $j = 1, \ldots, l$ をみたす s の分割 $\{s^1, \ldots, s^l\}$ を s の F 分割と呼ぶ．また，s の F 分割全体の集合を $P^F(s)$ で表す．

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$，FCS F に対して，次の 2 つの条件を満たすときベクトル $t \in [0,1]^n$ は s の F-ベクトルであるという．

(i) $t \leq s, t \in F$

(ii) $t \leq t' \leq s, t' \in F$ ならば，$t' = t$

また，s の F-ベクトル全体の集合を $C^F(s)$ で表す．定義より，$s \in F$ ならば，$C^F(s) = \{s\}$ となることがわかる．

定義 17 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ と FCS F が与えられたとき，$\hat{v}$ の F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ を次のように定義する．

$$\hat{v}^F(s) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{l} \hat{v}(s^j) \;\middle|\; \{s^1, \ldots, s^l\} \in P^F(s) \right\}.$$

定義から明らかなように，ファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ が強優加法的かつ $s \in F$ なら，$\hat{v}^F(s) = \hat{v}(s)$ となる．

3.2 分割集合と交差集合

FCS の中でも特別なクラスとして分割集合と交差集合を考える．

定義 18 F を FCS とする．任意の $s \in [0,1]^n$ に対して $C^F(s)$ が s の分割であるとき，F を分割集合 (*Partition Set*) と呼ぶ．

分割集合に関して，以下の 2 つの定理が成り立つことがわかっている．

定理 3 *[5]* 次の条件は同値である．

(i) FCS F が分割集合

(ii) 任意の $s \in [0,1]^n$ に対して N の分割 $\{I_1, \ldots, I_l\}$ が存在して，次式が成り立つ．

$$C^F(s) = \{s_{|I_1}, \ldots, s_{|I_l}\}$$

(iii) FCS F に対して，次式が成り立つ．

$$s \in F\ ,\ t \in F\ , s \wedge t \neq \mathbf{0}\ \Rightarrow\ s \vee t \in F$$

定理 4 *[5]* ファジィ提携を $s \in [0,1]^n$，ファジィ協力ゲームを $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$，FCS を F とする．FCS F が分割集合のとき，$\hat{v}$ が強優加法的であるなら任意の s について次の式が成り立つ．

$$\hat{v}^F(s) = \sum_{t \in C^F(s)} \hat{v}(t)$$

次に分割集合よりもさらに特別なクラスである交差集合を導入する．

定義 19 ファジィ提携を $s, t \in [0,1]^n$，ファジィ協力ゲームを $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$，FCS を F とする．次の式が成り立つとき，F は交差集合 (*Intersecting Set*) であるといわれる．

$$s \in F,\ t \in F,\ s \wedge t \neq \mathbf{0}\ \Rightarrow\ s \vee t \in F, s \wedge t \in F$$

3.3 制限ゲームの特性

前節でファジィ協力ゲームにおける制限ゲームを導入したが，ここでは制限ゲームが元のファジィ協力ゲームの性質を継承するかについて検討する．

命題 1 *[5]* ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ によらず，FCS F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ は強優加法的である．同様に，ファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ によらず，FCS F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ は弱優加法的である．

命題 2 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \mathcal{G}$ が単調であるなら，FCS F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ も単調である．

証明 注意 1 と命題 1 より，明らかに成り立つ． □

定理 5 *[5]* ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \mathcal{G}$ が強優加法的かつ凸で，FCS F が交差集合であるとき，F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ も凸である．

命題 2 と定理 5 より，単調性と凸性に関しては，制限ゲームが元のファジィ協力ゲームの性質を継承することがわかる．

4 誘導 Shapley 値

4.1 誘導ゲームと誘導 Shapley 値

コアは配分の集合を与えるのに対し，プレーヤー個人への配り方を決める，ファジィ提携とファジィ協力ゲームに依存した解関数 $\xi : [0,1]^n \times \hat{\mathcal{G}} \to \mathbf{R}^n, \xi(s,\hat{v}) = (\xi_1(s,\hat{v}),\ldots,\xi_n(s,\hat{v})) \in \mathbf{R}^n$ を導入する．ファジィ協力ゲームの解関数として，Shapley 値が考えられるが，ファジィ提携とファジィ協力ゲームの対から Shapley 値を定義するのは難しい．そこで，ファジィ提携とファジィ協力ゲームからクリスプゲームを誘導し，そのクリスプゲームの Shapley 値を用いることで，ファジィ協力ゲームの Shapley 値とすることを考える．

後で述べる議論のため，ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と $T \subseteq N$ に対して，次のようなファジィ提携 $s_{|T} \in [0,1]^n$ を考える．

$$(s_{|T})_i = \begin{cases} s_i & \text{if } i \in T, \\ 0 & \text{if } i \notin T. \end{cases}$$

ファジィ提携とファジィ協力ゲームから誘導されるクリスプゲームを次のように定義する．

定義 20 ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が与えられたとき，s と $\hat{v}$ から誘導されるクリスプゲーム $v^s : 2^{\text{supp } s} \to \mathbf{R}$ を次式とする．

$$v^s(T) = \hat{v}(s_{|T}), \quad \forall T \subseteq \text{supp } s$$

これ以降，ファジィ提携とファジィ協力ゲームから誘導されるクリスプゲームを誘導ゲームと呼ぶ．ファジィ提携 s による誘導ゲーム全体の集合を $\mathcal{G}^s$ とする．

誘導ゲームとクリスプゲームの Shapley 値を用いて，ファジィ協力ゲームの Shapley 値とし，これを誘導 Shapley 値と呼ぶ．

定義 21 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ をファジィ協力ゲームとする．$\hat{v}$ における s に対する誘導 Shapley 値 $g(s,\hat{v})$ を次のように定義する．

$$g_i(s,\hat{v}) = \begin{cases} \phi_i(\text{supp } s, v^s), & \text{if } i \in \text{supp } s, \\ 0, & \text{if } i \notin \text{supp } s. \end{cases}$$

$$g(s,\hat{v}) = (g_1(s,\hat{v}), \ldots, g_n(s,\hat{v}))$$

ただし，ϕ はクリスプゲームの Shapley 値である．

誘導 Shapley 値はファジィ提携 s とファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ に依存して決まるので，g は $g : [0,1]^n \times \hat{\mathcal{G}} \to \mathbf{R}^n$ なる関数である．また，これ以降，$\hat{v}$ における s に対する誘導 Shapley 値を単に誘導 Shapley 値と呼ぶ．誘導 Shapley 値の公理を述べる前にいくつかの概念を導入する．

プレーヤー i のファジィ提携 s への参加度を 0 にしたファジィ提携 s^{-i} を次のように定義する．

$$(s^{-i})_j = \begin{cases} s_j, & \text{if } j \neq i, \\ 0, & \text{if } j = i. \end{cases}$$

次の関係を満たすプレーヤー $i \in \text{supp } s$ を $\hat{v}$ における s-ダミープレーヤーという．

$$\hat{v}(s_{|T} + s_i e^i) \quad = \quad \hat{v}(s_{|T}) + \hat{v}(s_i e^i), \quad \forall T \subseteq \text{supp } s^{-i}.$$

ファジィ提携 s に対して，プレーヤー $i,j \in \text{supp } s$ の要素を入れ替えたファジィ提携 s^{ij} を次のように定義する．

$$(s^{ij})_k = \begin{cases} s_j, & \text{if } k = i, \\ s_i, & \text{if } k = j, \\ s_k, & \text{if } k \neq i,j. \end{cases}$$

$\hat{v}(s) = \hat{v}(s^{ij})$ を満たす $i,j \in \text{supp } s$ は $\hat{v}$ における s-対称なプレーヤーであるといわれる．

なお，クリスプゲームにおけるダミープレーヤー $i \in N$ と対称なプレーヤー $j,k \in N$ は，次のように表現される．

$$\begin{aligned} v(T \cup i) &= v(T) + v(i), \quad \forall T \subseteq N \setminus i. \\ v(S \cup j) &= v(S \cup k), \quad \forall S \subseteq N \setminus j,k. \end{aligned}$$

上の定義はこれらを自然な形で拡張したものである．

誘導 Shapley 値の公理として，以下の 4 つの公理を考える．次の $\xi : [0,1]^n \times \mathcal{G} \to \mathbf{R}^n$ はファジィ協力ゲームの一般的な解関数である．

公理 5 合理性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，ゲームの解関数 ξ は次式を満たす.

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathrm{supp}\ s} \xi_i(s,\hat{v}) = \hat{v}(s). \\ \sum_{i \notin \mathrm{supp}\ s} \xi_i(s,\hat{v}) = 0. \end{cases}$$

公理 6 加法性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，ゲームの解関数 ξ は次式を満たす.

$$\xi(s, \hat{v} + \hat{w}) = \xi(s,\hat{v}) + \xi(s,\hat{w}).$$

公理 7 s-ダミー性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，プレーヤー i が $\hat{v}$ 上において s-ダミープレーヤーであるなら，ゲームの解関数 ξ は次式を満たす.

$$\xi_i(s,\hat{v}) = \begin{cases} \hat{v}(s_i e^i), & \text{if } i \in \mathrm{supp}\ s. \\ 0, & \text{if } i \notin \mathrm{supp}\ s. \end{cases}$$

公理 8 s-対称性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ とファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，プレーヤー i, j が $\hat{v}$ において s-対称なプレーヤーであるなら，ゲームの解関数 ξ は次式を満たす.

$$\xi_i(s,\hat{v}) = \xi_j(s,\hat{v}).$$

定理 6 *[5]* $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ をファジィ協力ゲームとする．s を固定したときに，$\hat{v}$ に依存して定まる解 $\xi(s,\hat{v})$ が，s と $\hat{v}$ から誘導されるゲーム v^s にのみ依存して定まると仮定する．このとき，公理 5 - 8 を満たす解 ξ は，誘導 Shapley 値のみである.

4.2 誘導 Shapley 値の特性

この節では，コアと誘導 Shapley 値との関係，および Choquet 積分型 Shapley 値と誘導 Shapley 値との関係について述べる.

まず，コアと誘導 Shapley 値との関係における定理を述べる前に補題を導入する.

補題 1 ファジィ協力ゲーム $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が凸であるなら，すべてのファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ に対して，誘導ゲーム v^s はクリスプゲームとして凸である.

証明 $T_1, T_2 \subseteq \mathrm{supp}\ s$ とすると，

$$\begin{aligned} v^s(T_1 \cup T_2) + v^s(T_1 \cap T_2) &= \hat{v}(s_{|T_1 \cup T_2}) + \hat{v}(s_{|T_1 \cap T_2}) \\ &= \hat{v}((s_{|T_1}) \vee (s_{|T_2})) + \hat{v}((s_{|T_1}) \wedge (s_{|T_2})) \\ &\geq \hat{v}(s_{|T_1}) + \hat{v}(s_{|T_2}) \\ &= v^s(T_1) + v^s(T_2) \end{aligned}$$

以上より，誘導ゲーム v^s はクリスプゲームとして凸である. □

定理 7 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ をファジィ協力ゲーム，$\hat{v}$ の s に対するコアを $\hat{C}(s,\hat{v})$，誘導 Shapley 値を $g(s,\hat{v})$ とする．このとき，$\hat{v}$ が単調かつ凸であるなら，以下の関係が成り立つ.

$$g(s,\hat{v}) \in \hat{C}(s,\hat{v}).$$

証明 補題 1 より，ファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ が凸なら誘導ゲーム v^s も凸である．よって，このとき v^s の Shapley 値は v^s の Core に含まれる．次に，

$$\sum_{i \in \text{supp } s} g_i(s, \hat{v}) = v^s(\text{supp } s) = \hat{v}(s).$$

より，誘導ゲームの Shapley 値がファジィ提携 s に関する全体合理性を満たすことがわかる．また，ゼロプレイヤー特性も満たす．

$$g_i(s, \hat{v}) = 0, \ \forall i \notin \text{supp } s.$$

ここで，v^s に対する提携合理性より，

$$\sum_{i \in T} g_i(s, \hat{v}) \geq v^s(T).$$

より，

$$\sum_{i \in \text{supp } s'} g_i(s, \hat{v}) \geq v^s(\text{supp } s'), \quad \forall s' \leq s.$$

が成り立つ．$\hat{v}$ の単調性より

$$\hat{v}(s') \leq \hat{v}(s_{|\text{supp } s'})$$

が成り立つ．よって，

$$\sum_{i \in \text{supp } s'} g_i(s, \hat{v}) \geq \hat{v}(s'), \quad \forall s' \leq s.$$

が成り立つ．以上より，誘導 Shapley 値はファジィ協力ゲーム $\hat{v}$ のコア $C(s, \hat{v})$ に含まれる． □

次に，誘導 Shapley 値と Choquet 積分 Shapley 値との関係について述べる．ここで，補題を 1 つ導入する．

補題 2 [9] 任意の整数 a,c,s が $1 \leq s \leq a < c$ を満たすとき次の関係が成り立つ．

$$\frac{1}{c!} \sum_{i=0}^{c-a} (s+i-1)!(c-s-i)!_{c-a}C_i = \frac{(s-1)!(a-s)!}{a!}$$

ファジィ協力ゲームのクラスを $\hat{\mathcal{G}}^c$ に限定したとき，この 2 つの Shapley 値に対し，次の関係が成り立つ．

定理 8 ファジィ提携を $s \in [0,1]^n$，ファジィ協力ゲームを $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}^c$ とする．このとき，$\hat{v}$ に対して Choquet 積分型 Shpaley 値 f と誘導 Shpaley 値 g は一致する．つまり次式が成り立つ．

$$f_i(s, \hat{v}) = g_i(s, \hat{v})$$

証明 定義より，$i \notin \text{supp } s$ のとき，$f_i(s, \hat{v}) = g_i(s, \hat{v}) = 0$ となる．

$i \in \text{supp } s$ のときを考える．Choquet 積分型 Shpaley 値の定義より，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} f_i(s, \hat{v}) &= \sum_{l=1}^{q(s)} \phi_i'([s]_{h_l}, v)(h_l - h_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{q(s)} \sum_{T \subseteq [s]_{h_l}} \beta(|T|; |[s]_{h_l}|)[v(T) - v(T \setminus i)](h_l - h_{l-1}) \end{aligned} \tag{5}$$

一方，誘導 Shpaley 値の定義より，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} g_i(s,\hat{v}) &= \phi_i(\text{supp } s, v^s) \\ &= \sum_{T \subseteq \text{supp } s} \beta(|T|; |\text{supp } s|)[v^s(T) - v^s(T \setminus i)] \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，誘導ゲームと Choquet 積分型ファジィ協力ゲームの定義を (6) に用いると次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} g_i(s,\hat{v}) &= \sum_{T \subseteq \text{supp } s} \beta(|T|; |\text{supp } s|)[\hat{v}(s_{|T}) - \hat{v}(s_{|T\setminus i})] \\ &= \sum_{l=1}^{q(s)} \sum_{T \subseteq \text{supp } s} \beta(|T|; |\text{supp } s|)[v([s_{|T}]_{h_l}) - v([s_{|T\setminus i}]_{h_l})](h_l - h_{l-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

また，次の関係が得られる．

$$[s_{|T}]_{h_l} = \{j \in T \mid s_j \geq h_l\} = T \cap [s]_{h_l}$$
$$[s_{|T\setminus\{i\}}]_{h_l} = \{j \in T \setminus i \mid s_j \geq h_l\} = (T \setminus i) \cap [s]_{h_l}$$

これを (7) に適用すると，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} g_i(s,\hat{v}) &= \sum_{l=1}^{q(s)} \sum_{T \subseteq \text{supp } s} \beta(|T|; |\text{supp } s|)[v(T \cap [s]_{h_l}) - v((T \setminus i) \cap [s]_{h_l})](h_l - h_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{q(s)} \sum_{T_1 \subseteq [s]_{h_l}} \sum_{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l}} \beta(|T_1 \cup T_2|; |\text{supp } s|) \\ &\quad [v((T_1 \cup T_2) \cap [s]_{h_l}) - v(((T_1 \cup T_2) \setminus i) \cap [s]_{h_l})](h_l - h_{l-1}) \\ &= \sum_{l=1}^{q(s)} \sum_{T_1 \subseteq [s]_{h_l}} \sum_{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l}} \beta(|T_1 \cup T_2|; |\text{supp } s|) \\ &\quad [v(T_1) - v(T_1 \setminus i)](h_l - h_{l-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

よって，(5) と (8) より，次式が成り立つことを示せばよい．

$$\sum_{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l}} \beta(|T_1 \cup T_2|; |\text{supp } s|) = \beta(|T_1|; |[s]_{h_l}|) \tag{9}$$

$T_1 \cap T_2 = \emptyset$ に注意すると，(9) の左辺は次のようになる．

$$\sum_{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l}} \beta(|T_1 \cup T_2|; |\text{supp } s|)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l}} \frac{(|T_1| + |T_2| - 1)!(|\text{supp } s| - |T_1| - |T_2|)!}{|\text{supp } s|!} \\ &= \sum_{i=0}^{|\text{supp } s| - |[s]_{h_l}|} \sum_{\substack{T_2 \subseteq \text{supp } s \setminus [s]_{h_l} \\ |T_2| = i}} \frac{(|T_1| + i - 1)!(|\text{supp } s| - |T_1| - i)!}{|\text{supp } s|!} \\ &= \sum_{i=0}^{|\text{supp } s| - |[s]_{h_l}|} \frac{(|T_1| + i - 1)!(|\text{supp } s| - |T_1| - i)!}{|\text{supp } s|!} \begin{pmatrix} |\text{supp } s| - |[s]_{h_l}| \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

(10) に補題 2 を用いると，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{|\mathrm{supp}\ s|-|[s]_{h_l}|}\frac{(|T_1|+i-1)!(|\mathrm{supp}\ s|-|T_1|-i)!}{|\mathrm{supp}\ s|!}\ {}_{|\mathrm{supp}\ s|-|[s]_{h_l}|}C_i &= \frac{(|T_1|-1)!(|[s]_{h_l}|-|T_1|)!}{|[s]_{h_l}|!}\\ &= \beta(|T_1|;|[s]_{h_l}|)\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\sum_{T_2\subseteq \mathrm{supp}\ s\setminus[s]_{h_l}}\beta(|T_1\cup T_2|;|\mathrm{supp}\ s|)=\beta(|T_1|;|[s]_{h_l}|)$ が成り立ち，$f_i(s,\hat{v})=g_i(s,\hat{v})$ が成り立つことが示された．□

4.3 制限ゲームの誘導 Shapley 値

ファジィ協力ゲームによる制限ゲームの解として，制限ゲームの誘導 Shapley 値を考える．

定義 22 ファジィ協力ゲーム $\hat{v}\in\mathcal{G}$ の FCS F による制限ゲーム $\hat{v}^F$ におけるファジィ提携 $s\in[0,1]^n$ に対する誘導 Shapley 値を次式で定義する．

$$\mu_i(s,\hat{v},F)=g_i(s,\hat{v}^F)$$

$$\mu(s,\hat{v},F)=(\mu_1(s,\hat{v},F),\ldots,\mu_n(s,\hat{v},F))$$

定理 7 の系として次が与えられる．

系 1 ファジィ提携を $s\in[0,1]^n$，ファジィ協力ゲームを $\hat{v}\in\mathcal{G}$，FSC を F，Myerson 値を $\mu(s,\hat{v},F)$，ファジィ協力ゲームのコアを $C(s,\hat{v})$ とする．このとき，$\hat{v}$ が単調かつ凸で，F が交差集合であるなら，以下の関係が成り立つ．

$$\mu(s,\hat{v},F)\in\hat{C}(s,\hat{v}^F)$$

5 おわりに

本稿では，ファジィ協力ゲームの解について議論し，FCS による提携の制限を考えた．まず，FCS の概念をクリスプゲームからファジィ協力ゲームへと拡張し，FCS による制限ゲームを導入した．そして，ファジィ協力ゲームに対する誘導 Shapley 値を提案し，その性質について述べた．

参考文献

[1] E. Algaba, J. M. Bilbao and J. Lopez, *A unified approach to restricted games*, Theory and Decision. **50**, 333-345, 2001.

[2] J. P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[3] J. M. Bilbao, *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[4] D. Butnariu, *Stability and Shapley value for an n-persons fuzzy-game*, Fuzzy Sets and Systems, **4**, 63-72, 1980.

[5] A. Moritani, T. Tanino, K. Kuroki and K. Tatsumi, *Cooperative fuzzy games with restrictions on coalitions*, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2003 (submitted)

[6] L. S. Shapley, *A value for n-person games*, Annals of Mathematics Studies, **28**, 307-317, 1974.

[7] L. S. Shapley, *On balanced sets and cores*, Naval Research Logistics Quarterly, **14**, 453-460, 1967.

[8] L. S. Shapley, *Cores of convex games*, International Journal of Game Theory, **1**, 11-26, 1971.

[9] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, *Axiomatic Characterizations of the Shapley Function on a Class of Cooperative Fuzzy Games*, Central European Journal of Operational Research (to appear).

[10] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, *The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games*, Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **12**, 193-202, 2000.

[11] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, *The Shapley function on a class of cooperative fuzzy games*, European Journal of Operational Research, **129**, 596-618, 2001.